**Endomorphismes orthogonaux**

Dans tout le chapitre, désignera un espace euclidien de dimension .

**Définitions et premières propriétés**

1. **Caractérisations équivalentes**

Définition : Soit . On a équivalence entre :

1. est bijectif et

Définition : On appelle endomorphisme orthogonal de tout endomorphisme tel que

On note l’ensemble des endomorphismes orthogonaux de

Propriété : Soient , et une base orthonormée de . On a équivalence entre :

1. est un endomorphisme orthogonal de .
2. est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

(Le 3e point vient du fait que est orthonormée, donc )

Exemple : Soit un sev de tel que , notons la projection orthogonale sur .

Comme , et que , on a

Donc . Alors , donc

Ainsi n’est pas injectif, donc pas bijectif, donc .

Notons la symétrie orthogonale par rapport à . Dans une b.o.n de adaptée à la décomposition , alors

Alors

Donc .

Ainsi .

Propriété : L’ensemble des endomorphismes orthogonaux de muni de la composition est un groupe. Plus précisément, est un sous-groupe de où désigne l’ensemble des endomorphisme bijectifs de  :

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. conserve la norme, ie
2. conserve le produit scalaire, ie
3. base orthonormée de , l’image de est une base orthonormée de (càd que envoie toute b.o.n de sur une b.o.n de ) .
4. b.o.n de telle que l’image de par est une base orthonormée de (càd envoie au moins une b.o.n de sur une b.o.n de ).

Remarque : Soit . Puisque ssi conserve la norme, les endomorphismes orthogonaux de sont aussi appelés isométries vectorielles de .

1. **Isométries directes et indirectes**

Propriété : Soit , alors

Démonstration :

Soit alors

Donc

Soit une b.o.n alors

Ainsi donc

Corollaire : Si

Attention : Si , on n’a pas forcément orthogonal !

Définition : On appelle isométrie directe (ou positive) de tout tel que .

On appelle isométrie indirecte de tout tel que

Proposition : L’ensemble des isométries directes de , noté , est un sous-groupe de , on l’appelle groupe spécial orthogonal de . L’ensemble des matrices orthogonales de déterminant , noté , est un sous-groupe de , appelé groupe spécial orthogonal d’ordre .

Exemples :

* est paire

Soit un sev de , notons la symétrie orthogonale par rapport à . On a vu que , et si on prend une b.o.n de adaptée à la décomposition (ie est la concaténation d’une b.o.n de avec une b.o.n de ) alors

Où le nombre de correspond à et celui de à

On a alors

Ainsi est paire

1. **Lien avec les réflexions**

Définition : Soit un sev de . On dit que est un **hyperplan** de si

Propriété : Soit un sev de On a équivalence entre :

1. est un hyperplan de
2. avec tel que

Définition : on appelle **réflexion** de toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de .

Remarque : Si est une réflexion de , il existe un hyperplan de tq est la symétrie orthogonale par rapport à .

Théorème : Tout endomorphisme orthogonal de peut s’écrire comme la composée de réflexions de , avec .

**Réductions des endomorphismes orthogonaux**

1. **Quelques résultats utiles pour la réduction**

Proposition : Soit , alors

Démonstration : ⍟

Soit , alors comme est euclidien,

Alors tel que .

Alors d’une part :

Et d’autre part, donc conserve la norme, ainsi

D’où , ie

Donc

Attention : contrairement aux endomorphismes autoadjoints, qui possèdent toujours au moins une valeur propre (réelle), il existe des endomorphismes orthogonaux qui n’admettent aucune valeur propre.

Corollaire : Soit alors .

Lemme : Soit . Soit un sev de stable par , alors est aussi stable par . De plus, l’endomorphisme (resp. ) est un endomorphisme orthogonal de (resp. ) .

Démonstration : ⍟

Comme et , est bijectif donc conserve les dimensions ainsi

(cela se prouve facilement en prenant une base de , et en montrant que est libre).

On en déduit donc que .

Soit , on veut montrer que . Soit , alors

car donc ,

car donc conserve le produit scalaire.

car et .

Ainsi . D’où .

Montrons que appartient à

Soit , alors

Donc .

(On fait pareil pour l’autre)

Lemme : Soit . Alors il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par , ie

sev de avec tel que

1. **Endomorphismes orthogonaux en dimension 1 et 2**
2. En dimension 1

On suppose que . Soit , soit une b.o.n de .

Alors

Donc

Donc ou

Réciproquement on a vu que

Ainsi si , .

1. En dimension 2

Supposons que . Soit , soit une b.o.n de .

Alors

On va essayer de caractériser . Soit . Alors

Si (ie

Comme

Soit

Donc tel que

Donc

Comme , on a

D’où et

Ainsi

Réciproquement, , et

Donc

Propriété : On a

De plus, est un sous-groupe commutatif de  :

Reprenons les notations ci-dessus. Soit avec

Comme

Comme , on a

Donc et

Ainsi

Réciproquement, , et

Donc

Propriété : On a , où .

*Revenons aux endomorphismes orthogonaux*

Soit , une b.o.n de , alors

* Cas où (ie est une isométrie directe du plan )

Alors

Alors et

Une image contenant ligne, diagramme, Tracé

Description générée automatiquement

Intéressons-nous à la diagonalisabilité de  :

Le polynôme caractéristique de est :

Donc

Si , alors , donc

Si donc

Sinon, et donc donc n’est pas dz.

* Cas où

Soit une b.o.n de

Alors

On a

Donc est autoadjoint et orthogonal, donc

Donc est la symétrie sur parallèlement à

Comme de plus, est autoadjoint, ses sev propres, sont orthogonaux et

Ainsi est la symétrie orthogonale par rapport à .

Dans une b.o.n adaptée à la décomposition , on a

Ainsi est la réflexion par rapport à la droite vectorielle .

1. **Réduction des automorphismes orthogonaux**

Théorème : Soit . Il existe une b.o.n de dans laquelle la matrice de est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme ou avec .

Remarque : Quitte à réorganiser les éléments de la b.o.n , on peut trouver une b.o.n de telle que ,