**Endomorphismes orthogonaux**

Dans tout le chapitre, désignera un espace euclidien de dimension .

**Caractérisations équivalentes**

Définition : Soit . On a équivalence entre :

1. est bijectif et

Définition : On appelle endomorphisme orthogonal de tout endomorphisme tel que

On note l’ensemble des endomorphismes orthogonaux de

Propriété : Soient , et une base orthonormée de . On a équivalence entre :

1. est un endomorphisme orthogonal de .
2. est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

(Le 3e point vient du fait que est orthonormée, donc )

Exemple : Soit un sev de tel que , notons la projection orthogonale sur .

Comme , et que , on a

Donc . Alors , donc

Ainsi n’est pas injectif, donc pas bijectif, donc .

Notons la symétrie orthogonale par rapport à . Dans une b.o.n de adaptée à la décomposition , alors

Alors

Donc .

Ainsi .

Propriété : Soit , alors

Propriété : L’ensemble des endomorphismes orthogonaux de muni de la composition est un groupe. Plus précisément, est un sous-groupe de où désigne l’ensemble des endomorphisme bijectifs de  :

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. conserve la norme, ie
2. conserve le produit scalaire, ie
3. base orthonormée de , l’image de est une base orthonormée de (càd que envoie toute b.o.n de sur une b.o.n de ) .
4. b.o.n de telle que l’image de par est une base orthonormée de (càd envoie au moins une b.o.n de sur une b.o.n de ).

Remarque : Soit . Puisque ssi conserve la norme, les endomorphismes orthogonaux de sont aussi appelés isométries vectorielles de .

Définition : Soit un sev de . On dit que est un hyperplan de si

Propriété : Soit un sev de On a équivalence entre :

1. est un hyperplan de
2. non nul tel que